АНОТАЦІЯ

Крикля Я. А. Вільні ліві *n*-тринільпотентні тріоїди. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика (Галузь знань 11 Математика та статистика). ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка», м. Полтава, Міністерство освіти і науки України, 2023.

Дисертаційна робота присвячена вивченню вільних алгебр у многовиді тріоїдів.

Вивчення універсальних алгебр, які називаються тріоїдами, започаткували Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко. Ці алгебри вперше з'явилися під час досліджень тернарних планарних дерев. Тріоїд – це непорожня множина з трьома бінарними асоціативними операціями, які задовольняють додаткові вісім аксіом. Тріоїди також можуть бути визначені за допомогою дімоноїдів, введених Ж.-Л. Лоде у контексті алгебраїчної K-теорії. А саме, тріоїд є дімоноїдом, наділеним бінарною асоціативною операцією, що задовольняє додаткові п'ять аксіом. Зазначимо, що триалгебри, введені Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко, є лінійними аналогами тріоїдів, тому результати, отримані для тріоїдів, можуть бути застосованими до теорії триалгебр. Якщо всі операції тріоїда (триалгебри) збігаються, то отримуємо поняття напівгрупи (асоціативної алгебри), а під час збігу двох конкретних операцій тріоїда (триалгебри) отримуємо поняття дімоноїда (діалгебри). Тріоїди та триалгебри мають тісні зв'язки з алгебрами Хопфа, алгебрами Лейбніца, некомутативною версією алгебр Пуасона та операторами Рота–Бакстера. Завдяки своїй аксіоматиці тріоїди також пов'язані з такими алгебраїчними структурами як дігрупи, g-дімоноїди, допельнапівгрупи та n-кратні напівгрупи.

Знаходження абсолютно вільних структур і відносно вільних структур є основною проблемою абстрактної алгебри. Сьогодні теорія многовидів тріоїдів активно розвивається. Вже відомі конструкції вільного тріоїду, вільного n-нільпотентного тріоїду, вільної прямокутної трисполуки, вільного комутативного тріоїду, вільного абелевого тріоїду та вільної трисполуки.

Об'єктом дослідження дисертації є вільні ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди та вільні тріоїди. Предметом дослідження є структура та властивості вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів та вільних тріоїдів. У процесі дослідження дисертаційної проблематики застосовуються методи алгебраїчної теорії напівгруп та універсальної алгебри.

У дисертації введено ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди, які є аналогами лівих (правих) нільпотентних напівгруп рангу n, розглянутих Б. М. Шайном, та побудовано вільний лівий (правий) n-тринільпотентний тріоїд довільного рангу.

Як зазвичай, $\mathbb{N}$ позначає множину всіх натуральних чисел. Через Ω позначимо сигнатуру тріоїда. Нехай $a_1,\ldots,a_n$ – індивідуальні змінні. Через $P\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ позначимо множину всіх термів алгебр сигнатури Ω, які мають вигляд $a_1 \circ_1 \ldots \circ_{n-1} a_n$ з розстановкою дужок, де $\circ_1,\ldots,\circ_{n-1} \in \Omega$. Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається лівим триніпольтентним, якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$, будь-якого $a \in T$ та будь-якого $p\left(a_1,\ldots,a_n\right) \in P(a_1,\ldots,a_n)$ мають місце наступні тотожності:

$$p\left(a_1,\ldots,a_n\right) * a = p\left(a_1,\ldots,a_n\right),\ \ p\left(a_1,\ldots,a_n\right) \vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n,$$

де $* \in \{\dashv,\perp\}$. Найменше серед таких n називається індексом лівої тринільпотентності тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$. Для $k \in \mathbb{N}$ лівий тринільпотентний тріоїд з індексом лівої тринільпотентності $\leq k$ називається лівим k-тринільпотентним. У будь-якому тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ маємо $p\left(a_1,\ldots,a_n\right) \vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n \vdash a.$ Отже, якщо $(T,\vdash)$ є лівою нільпотентною напівгрупою рангу n, то отримаємо третю тотожність у визначенні лівого тринільпотентного тріоїда. Праві k-тринільпотентні тріоїди визначаються двоїстим чином. Операції будь-якого лівого (правого) 1-тринільпотентного тріоїда збігаються та він є напівгрупою лівих (правих) нулів. Клас усіх лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів утворює підмноговид многовиду тріоїдів. Тріоїд, який є вільним у многовиді лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів, називається вільним лівим (правим) n-тринільпотентним тріоїдом.

Нехай $n,k \in \mathbb{N}$ та $L \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Вважаємо, що $L+k=\{m+k \mid m \in L\}$. Для $L \neq \varnothing$ покладемо $L^{k,n}=\{m \in L \mid k+m \leq n\}$, і позначимо найменше число множини L через L_{min}. Нехай X – довільна непорожня множина, $F[X]$ – вільна напівгрупа на X та $w \in F[X]$. Довжину слова w позначимо через l_w. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Якщо $l_w \geq n$, то через $\overset{n}{\overrightarrow{w}}$ позначимо початкове підслово довжини n слова w, і якщо $l_w < n$, то нехай $\overset{n}{\overrightarrow{w}} = w$. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на множині

$$V_n=\{(w,L) \mid w \in F[X],\, l_w \leq n,\, L \subseteq \{1,2,\ldots,l_w\},\, L \neq \varnothing\}$$

за такими правилами:

$$(w,L) \dashv (u,R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L),$$

$$(w,L) \vdash (u,R) = \begin{cases} (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, \{n\}), & n < l_w + R_{min}, \\ (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, R^{l_w,n}+l_w) & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$(w,L) \perp (u,R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L \cup (R^{l_w,n}+l_w))$$

для всіх $(w,L),\,(u,R) \in V_n$. Алгебру $(V_n,\dashv,\vdash,\perp)$ позначимо через $FT_n^l(X)$. Доведено, що $FT_n^l(X)$ є вільним лівим n-тринільпотентним тріоїдом. Окремо розглянуто вільні ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди рангу 1. Встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда ізоморфна симетричній групі.

Охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-тринільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді. Якщо ρ є конгруенцією на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ такою, що $(T,\dashv,\vdash,\perp)/\rho$ є лівим (правим) n-тринільпотентним тріоїдом, то говоримо, що ρ є лівою (правою) n-тринільпотентною конгруенцією. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на множині

$$F = \{(w,L) \mid w \in F[X], L \subseteq \{1,2,\ldots,l_w\}, L \neq \varnothing\}$$

за правилами:

$$(w,L) \dashv (u,R) = (wu,L), \quad (w,L) \vdash (u,R) = (wu, R + l_w),$$
$$(w,L) \perp (u,R) = (wu, L \cup (R + l_w))$$

для всіх $(w,L),(u,R) \in F$. У роботі А. В. Жучка доведено, що $(F,\dashv,\vdash,\perp)$ є вільним тріоїдом. Його позначають через $FT(X)$.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Нехай далі

$$L^{(n)} = \begin{cases} \{n\}, & n \le L_{min}, \\ \{m \in L \mid m \le n\}, & n > L_{min} \end{cases}$$

для будь-якої непорожньої множини $L \subseteq \{1,2,\ldots,k\}$ та $k \in \mathbb{N}$. Візьмемо довільні елементи $(w,L),(u,R) \in FT(X)$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо бінарне відношення $\tilde{d}_n$ на $FT(X)$ за правилом:

$$(w,L)\tilde{d}_n(u,R) \quad \text{тоді і тільки тоді, коли} \quad \overset{n}{\vec{w}} = \overset{n}{\vec{u}} \quad i \quad L^{(n)} = R^{(n)}.$$

Доведено, що відношення $\tilde{d}_n$ є найменшою лівою n-тринільпотентною конгруенцією на вільному тріоїді $FT(X)$.

Підраховано потужність вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда в скінченному випадку. Описано всі ідемпотентні та всі регулярні елементи вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів. Знайдено всі максимальні підтріоїди вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів

$(n > 1)$. Показано, що вільний лівий n-тринільпотентий тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Підраховано потужність напівгрупи ендоморфізмів вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда та кількість всіх ідемпотентних і регулярних елементів вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів у скінченному випадку.

Результати дисертації можуть бути застосовані в теорії тріоїдів та триалгебр, теорії дімоноїдів та діалгебр, теорії напівгруп, універсальній алгебрі.

Ключові слова: тріоїд, лівий n-тринільпотентний тріоїд, вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд, конгруенція, напівгрупа, максимальний підтріоїд, регулярний елемент, ідемпотентний елемент, група автоморфізмів, напівгрупа ендоморфізмів, потужність.

ABSTRACT

Kryklia Y. A. Free left *n*-trinilpotent trioids. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, Speciality 111 Mathematics (Field of studies 11 Mathematics and Statistics). State Insitution «Luhansk Taras Shevchenko National University», Poltava, Ministry of Education and Science of Ukraine, 2023.

The thesis is devoted to the study of free algebras in the variety of trioids.

J.-L. Loday and M. O. Ronco introduced the study of universal algebras that are called trioids. Firstly these algebras appeared in the study of ternary planar trees. A trioid is a nonempty set with three binary associative operations which satisfy the additional eight axioms. Trioids may be also defined via dimonoids introduced by J.-L. Loday in the context of algebraic K-theory. Namely, a trioid is a dimonoid equipped with a binary associative operation which satisfies an additional five axioms. We should note that trialgebras introduced by J.-L. Loday and M. O. Ronco are linear analogues of trioids, so the results obtained for trioids can be applied to trialgebra theory. If all operations of a trioid (trialgebra) coincide, we obtain the notion of a semigroup (associative algebra), and if two concrete operations of the trioid (trialgebra) coincide, we obtain the notion of a dimonoid (dialgebra). Trioids and trialgebras are closely related to Hopf algebras, Leibniz algebras, the noncommutative version of Poisson algebras, and Rota-Baxter operators. Thanks to their axiomatics, trioids are also related to such algebraic structures as digroups, g-dimonoids, doppelsemigroups, and n-tuple semigroups.

Finding absolutely free structures and relatively free structures is a central problem in abstract algebra. Nowadays the variety theory of trioids is developing actively. The constructions of a free trioid, a free n-nilpotent trioid, a free rectangular triband, a free commutative trioid, a free abelian trioid, and a free triband are already known.

The object of the research of the thesis is free left (right) n-trinilpotent trioids and free trioids. The subject of the research is the structure and properties of free left (right) n-trinilpotent trioids and free trioids. The methods of the algebraic theory of semigroups and universal algebra are used in the process of researching the thesis issues.

In the thesis left (right) n-trinilpotent trioids are introduced, which are analogs of left (right) nilpotent semigroups of rank n considered by B. M. Schein, and the free left (right) n-trinilpotent trioid of an arbitrary rank is constructed.

As usual, $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers. By Ω we denote the signature of a trioid. Let $a_1,\ldots,a_n$ be individual variables. By $P(a_1,\ldots,a_n)$ we denote the set of all terms of the signature Ω, having the form $a_1 \circ_1 \ldots \circ_{n-1} a_n$ with parenthesizing, where $\circ_1,\ldots,\circ_{n-1} \in \Omega$. A trioid $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ is called left trinilpotent if for some $n\in\mathbb{N}$, any $a\in T$ and any $p(a_1,\ldots,a_n)\in P(a_1,\ldots,a_n)$ the following identities hold:

$$p(a_1,\ldots,a_n) * a = p(a_1,\ldots,a_n), \;\; p(a_1,\ldots,a_n)\vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n,$$

where $*\in\{\dashv,\perp\}$. The least such n is called the left trinilpotency index of $(T,\dashv,\vdash,\perp)$. For $k\in\mathbb{N}$, a left trinilpotent trioid of left trinilpotency index $\leq k$ is said to be left k-trinilpotent. In any trioid $(T,\dashv,\vdash,\perp)$, we have $p(a_1,\ldots,a_n)\vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n \vdash a.$ Hence, if $(T,\vdash)$ is a left nilpotent semigroup of rank n, we get the third identity in the definition of a left trinilpotent trioid. Right k-trinilpotent trioids are defined dually. The operations of any left (right) 1-trinilpotent trioid coincide and it is a left (right) zero semigroup. The class of all left (right) n-trinilpotent trioids forms a subvariety of the variety of trioids. A trioid which is free in the variety of left (right) n-trinilpotent trioids is called a free left (right) n-trinilpotent trioid.

Let $n,k\in\mathbb{N}$ and $L\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$. We suppose that $L+k=\{m+k \mid m\in L\}$. For $L\neq\varnothing$ we put $L^{k,n}=\{m\in L \mid k+m\leq n\}$, and denote the least number of the set L by

L_{min}. Let X be an arbitrary nonempty set, let $F[X]$ be the free semigroup on X and $w \in F[X]$. The length of the word w is denoted by l_w. Fix $n \in \mathbb{N}$. If $l_w \geq n$, let $\overset{n}{\overrightarrow{w}}$ denote the initial subword with the length n of the word w, and if $l_w < n$, let $\overset{n}{\overrightarrow{w}} = w$. Define operations $\dashv$, $\vdash$ and $\perp$ on the set

$$V_n = \{(w,L) \mid w \in F[X],\, l_w \leq n,\, L \subseteq \{1,2,\ldots,l_w\},\, L \neq \varnothing\}$$

according to the following rules:

$$(w,L) \dashv (u,R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L),$$

$$(w,L) \vdash (u,R) = \begin{cases} (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, \{n\}), & n < l_w + R_{min}, \\ (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, R^{l_w,n} + l_w) & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$(w,L) \perp (u,R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L \cup (R^{l_w,n} + l_w))$$

for all (w,L), $(u,R) \in V_n$. The algebra $(V_n, \dashv, \vdash, \perp)$ is denoted by $FT_n^l(X)$. It is proved that $FT_n^l(X)$ is a free left n-trinilpotent trioid. Free left (right) n-trinilpotent trioids of rank 1 are considered separately. It is established that the automorphism group of the free left (right) n-trinilpotent trioid is isomorphic to the symmetric group.

The least left (right) n-trinilpotent congruence on the free trioid is characterized. If ρ is a congruence on a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ such that $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ is a left (right) n-trinilpotent trioid, we say that ρ is a left (right) n-trinilpotent congruence.

Define operations $\dashv$, $\vdash$ and $\perp$ on the set

$$F = \{(w,L) \mid w \in F[X],\, L \subseteq \{1,2,\ldots,l_w\},\, L \neq \varnothing\}$$

according to the following rules:

$$(w,L) \dashv (u,R) = (wu, L), \quad (w,L) \vdash (u,R) = (wu, R + l_w),$$

$$(w,L) \perp (u,R) = (wu, L \cup (R + l_w))$$

for all $(w,L),(u,R)\in F$. In the paper of A. V. Zhuchok it is proved that $(F,\dashv,\vdash,\perp)$ is the free trioid. It is denoted by $FT(X)$.

Fix $n\in\mathbb{N}$. Let further

$$L^{(n)}=\begin{cases}\{n\}, & n\le L_{min},\\ \{m\in L\mid m\le n\}, & n>L_{min}\end{cases}$$

for any nonempty $L\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$ and $k\in\mathbb{N}$. Let us take arbitrary elements $(w,L),(u,R)\in FT(X)$. For every $n\in\mathbb{N}$ define a binary relation $\tilde{d}_n$ on $FT(X)$ according to the rule:

$$(w,L)\tilde{d}_n(u,R)\quad\text{if and only if}\quad \overset{n}{\vec{w}}=\overset{n}{\vec{u}}\quad\text{and}\quad L^{(n)}=R^{(n)}.$$

It is proved that the relation $\tilde{d}_n$ is the least left n-trinilpotent congruence on the free trioid $FT(X)$.

The cardinality of the free left (right) *n*-trinilpotent trioid in the finite case is calculated. All idempotent and all regular elements of free left (right) *n*-trinilpotent trioids are described. All maximal subtrioids of free left (right) *n*-trinilpotent trioids $(n>1)$ are found. It is shown that a free left *n*-trinilpotent trioid contains a subtrioid, which can be represented as a left band of subdimonoids. The cardinality of the endomorphisms semigroup of a free left (right) *n*-trinilpotent trioid and the number of all idempotent and regular elements of free left (right) *n*-trinilpotent trioids in the finite case are calculated.

The results of the thesis can be applied to the theory of trioids and trialgebras, the theory of dimonoids and dialgebras, semigroup theory, and universal algebra.

Key words: trioid, left *n*-trinilpotent trioid, free left *n*-trinilpotent trioid, congruence, semigroup, maximal subtrioid, regular element, idempotent element, automorphism group, endomorphism semigroup, cardinality.