

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЗ „ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА”**

Кафедра алгебри та системного аналізу

СИЛАБУС

навчальної дисципліни «Алгебраїчні системи»
(назва дисципліни)
для освітнього рівня третій освітньо-науковий рівень
напряму / спеціальності(ей) 111 Математика

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри
Протокол № 4 від 26.11.2019 р.

Завідувач кафедри проф. Жучок А.В.  (підпис)

Перезатверджено: протокол № _____ від _____

Перезатверджено: протокол № _____ від _____

Перезатверджено: протокол № _____ від _____





1. **Назва дисципліни.**
„АЛГЕБРАЇЧНІ СИСТЕМИ”

2. **Код дисципліни.**
ПП1

3. **Тип дисципліни.**
Обов’язкова

4. **Рік (роки) навчання.**
1-й

5. **Семестр / семестри.**
1

Кількість кредитів ECTS.
4,5

6. **Відомості про викладача (викладачів).**

Жучок Анатолій Володимирович – завідувач кафедри алгебри та системного аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор, e-mail: zhuchok.av@gmail.com.

7. **Мета вивчення дисципліни (в термінах результату навчання й компетенції).**

Мета – формування в аспірантів погляду на сучасну алгебру як на науку про системи об’єктів довільної природи, оволодіння сучасними методами, теоретичними положеннями та основними застосуваннями абстрактної алгебри, формування вміння аналізувати структуру алгебраїчних об’єктів, будувати математичні моделі, застосовувати апарат дисципліни до вивчення абстрактних алгебраїчних структур.

8. **Компетенції здобувача, які формуються внаслідок вивчення дисципліни**

В результаті освоєння освітньо-наукової програми освітнього рівня доктора філософії у здобувача мають бути сформовані такі компетентності:

- Інтегральна компетентність (ІК), здатність розв’язувати комплексні проблеми в галузі професійної та/або дослідницько-інноваційної діяльності.
- загальні компетентності (ЗК), які не залежать від галузі та є обов’язковими для здобувачів ступеню доктора філософії;
- фахові компетентності (ФК), які розкривають вміння та навички здобувачів ступеню доктора філософії.

Таблиця 1. Компетентності та програмні результати навчання згідно із Освітньо-науковою програмою доктора філософії 111 Математика.

ОКЗ	Алгебраїчні системи	4,5	ІК, ЗК4, ЗК6, ЗК7, ЗК8, ЗК11, ЗК15, ЗК18, ЗК19, ЗК20, ЗК21, ЗК22, ЗК23, ЗК24, ЗК25, ЗК26, ЗК32, ЗК33, ФК2, ФК3, ФК4, ФК5, ФК6, ФК7, ФК8, ФК9, ФК10, ФК11, ФК12, ФК18, ФК19, ФК31, ФК32, ФК33, ФК34, ФК35	ПРН-3-2, ПРН-3-4, ПРН-3-12, ПРН-3-13, ПРН-3-14, ПРН-3-21, ПРН-3-28, ПРН-3-29, ПРН3-3-30, ПРН-У-1, ПРН-У-2, ПРН-У-4, ПРН-У-5, ПРН-У-10, ПРН-У-16, ПРН-У-17, ПРН-У-20, ПРН-У-21, ПРН-У-22, ПРН-У-23, ПРН-У-24, ПРН-У-25, ПРН-У-30, ПРН-У-31, ПРН-У-32
-----	---------------------	-----	--	---

Знання:

- Знання основоположних понять, термінів і категорій алгебраїчних систем.

- Знання теорії і практики застосування алгебраїчних систем та універсальних алгебр.
- Знання і вміння застосовувати провідні тенденції розвитку сучасної алгебри, основних шкіл та популярних концепцій.
- Знання основних теорій пізнання, концепцій істини та її критеріїв для осмислення конкретних наукових проблем в контексті типів раціональності в алгебраїчній науці.
- Вміння застосовувати результати теорії напівгруп до вивчення інших алгебраїчних систем.
- Знання техніки теорії напівгруп при вивченні інтерасоціативностей напівгруп.
- Знання нових алгебраїчних системи, такі як дімоноїди, доппель-напівгрупи, тріюїди.
- Знання основних проблем опису груп автоморфізмів алгебраїчних систем.
- Знання нових алгебраїчних методів для опису структурних властивостей математичних структур.
- Знання інформаційних технологій для знаходження, збереження, аналізу та репрезентування отриманих наукових даних з алгебраїчних систем.
- Знання математичних методів оптимізації та прийняття рішень в алгебрі.
- Знання кількісних методів аналізу інформації, вміння робити обґрунтовані висновки та рекомендації.
- Знання характерних особливостей наукової мови в алгебраїчних системах.

Уміння:

- Вільне володіння алгебраїчним та алгебро-модельним інструментарієм, понятійним апаратом.
- Вміння застосовувати провідні тенденції розвитку сучасної алгебри, основних шкіл та популярних концепцій.
- Навички проведення емпіричних досліджень з метою аналізу стратифікаційних процесів алгебраїчних систем.
- Вміння самостійно розробляти програму дослідження алгебраїчної системи, визначити ресурси для здійснення наукового проекту.
- Вибір адекватних методів математичного дослідження.
- Вміння оперувати якісними методами аналізу алгебраїчних систем та вміння робити обґрунтовані висновки та рекомендації.
- Вміння застосовувати результати теорії напівгруп до вивчення інших алгебраїчних систем.
- Вміння застосовувати техніку теорії напівгруп при вивченні інтерасоціативностей напівгруп.
- Вміння отримувати нові алгебраїчні системи, такі як дімоноїди, доппель-напівгрупи, тріюїди.
- Вміння розв'язувати проблему опису напівгруп ендоморфізмів алгебраїчних систем.
- Вміння розв'язувати проблему опису груп автоморфізмів алгебраїчних систем.
- Вміння використовувати нові алгебраїчні методи для опису структурних властивостей математичних структур.
- Вміння реагувати на основні ідеї та розпізнавати важливу наукову інформацію під час обговорень, дискусій, офіційних перемовин, лекцій, бесід, що пов'язаних з алгебраїчною системою. Вміння формулювати висновки та узагальнення.
- Вміння за допомогою інформаційних технологій видобувати, зберігати, аналізувати та репрезентувати отримані наукові данні з алгебраїчних систем.
- Вміння використовувати дедукцію, індукцію в дослідженнях алгебраїчних систем.
- Вміння здійснювати аналіз теоретичних та практичних проблем науки за допомогою
- Вміння застосовувати концептуально-методологічні принципи, притаманні сучасній науковій раціональності, для пізнання явищ в алгебрі та алгебраїчних системах.
- Вміння застосовувати сучасні ефективні засоби роботи з науковою та навчально-методичною літературою з алгебраїчних систем.

9. Передумови (актуальні знання, необхідні для опанування дисципліни).

Курс алгебри з циклу дисциплін базової вищої освіти.

10. Зміст дисципліни.

№	Змістовні модулі та їхня структура	денна форма навчання					заочна форма навчання				
		загальна кількість	Лекції	практичні заняття	лабораторні роботи	самостійна робота	загальна кількість	лекції	практичні заняття	лабораторні роботи	самостійна робота
Перший модуль											
Тема 1. Основні поняття абстрактної алгебри, теорії груп, кілець та полів											
1.1.	Відношення та відображення	4				4					
1.2.	Моделі й алгебри	4				4					
1.3.	Групоїди і групи	6		2		4					
1.4.	Кільця й тіла	6		2		4					
1.5.	Решітки	4				4					
Тема 2. Добутки і повні класи											
2.1.	Фільтри і фільтровані добутки	8	2	2		4					
2.2.	Елементарні вкладання. Елементарні підсистеми	6	2			4					
2.3.	Повнота й модельна повнота	6	2			4					
Тема 3. Квазімноговиди											
3.1.	Характеристичні властивості та визначальні співвідношення	6	2			4					
3.2.	Вільні композиції	8	2	2		4					
3.3.	Незалежні елементи та вільні системи	6	2			4					
Другий модуль											
Тема 4. Многовиди											
4.1.	Структурні характеристики. Ранги многовиду.	6	2			4					
4.2.	Многовиди уноїдів	6	2			4					
4.3.	Породжуючі системи. Решітка многовидів	8	2	2		4					
4.4.	Мінімальні многовиди та квазімноговиди	6	2			4					
Тема 5. Групи та алгебри Лі											
5.1.	Топологічні групи	14	2	2		10					
5.2.	Група Лі та її алгебра Лі	18	2	4		12					
5.3.	Підгрупи Лі та підалгебри Лі	13	2	2		9					
ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ ГОДИН		135	26	18		91					

11. Список рекомендованої навчальної літератури.

Основна навчальна література

1. Ван дер Варден Б. Л. *Алгебра*. – М: Наука, 1979. – 623 с.
2. Завало С. Т. *Курс алгебри*. – К.: Вища школа, 1985. – 503 с.
3. Кострикин А. И. *Введение в алгебру*. – М: Наука, 1977. – 497 с.
4. Курош А.Г. *Курс Высшей алгебры*. – М.: Наука, 1968. – 434 с.
5. Мальцев А. И. *Алгебраические системы*. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

Додаткова навчальна література

1. Винберг Э. Б. *Курс алгебры*. – М. Факториал Пресс, 2002. – 592 с.
2. Курош А. Г. *Лекции по общей алгебре*. – М.: Физматгиз, 1962. – 396 с.
3. Ляпин Е. С. *Алгебра и теория чисел*. – М.: Просвещение, 1974. – 383 с.
4. Фаддеев Д. К. *Лекции по алгебре*. М.: Наука, 1984. – 416 с.

12. Технології викладання та атестації.

Діяльність студента:

- опанування теоретичного матеріалу;
- самопідготовка (повторення матеріалу підручників та навчальних посібників, підготовка до практичних занять, поточного та підсумкового контролю);
- поточний контроль теоретичних знань під час проведення практичних робіт;
- написання контрольних модульних робіт.

Поточний контроль:

- виконання практичних завдань;
- письмова модульна контрольна робота.

Форма семестрового контролю:

1 семестр – іспит.

13. Критерії оцінювання (у %).

Семестрову рейтингову оцінку розраховують, виходячи з критеріїв:

- письмова модульна контрольна робота – 50%;
- результати виконання практичних робіт – 50%.

14. Мови викладання.

Українська.

15. Навчальний контент до проведення практичних робіт

Теми практичних робіт

1. Групоїди і групи.
2. Кільця й тіла.
3. Фільтровані добутки і повні класи.
4. Вільні системи та композиції.
5. Многовиди алгебраїчних систем.
6. Приклади груп та алгебр Лі. Лінійні групи як групи Лі.
7. Гомоморфізм груп та алгебр Лі.
8. Матрична експонента. Алгебри Лі лінійних груп.

16. Навчальний контент до організації самостійної роботи

Теми для самостійного вивчення

Тема 1. Основні поняття абстрактної алгебри, теорії груп, кілець та полів

1. Відношення та відображення (множини, відношення, відображення, еквівалентності, часткові й лінійні порядки, багатозначні та часкові відображення, потужність і порядкові числа).
2. Моделі й алгебри (n -арні відношення та функції, алгебраїчні системи, підсистеми, породжуючі сукупності, конгруенції, декартові добутки, операції над кардинальними і порядковими числами).
3. Групоїди й групи (групоїди й напівгрупи, квазігрупи й луи, групи).
4. Кільця й тіла (кільця, алгебраїчно замкнені поля, альтернативні тіла, лінійні алгебри).
5. Решітки (поняття решітки, модулярні й дистрибутивні решітки, алгебри Буля).

Тема 2. Добутки і повні класи

1. Застосування ультрадобутків.
2. Формули, що фільтруються умовно.

3. Потужності ультрадобутків.
4. Регулярні добутки.

Тема 3. Квазімноговиди

1. Репліки.
2. Амальгамовані композиції.

Тема 4. Многовиди

1. Многовиди уноїдів. Приклади.
2. Примітивні замикання.
3. Мінімальні многовиди. Приклади.

Тема 5. Групи та алгебри Лі

1. Приклади групи Лі.
2. Лівоінваріантне векторне поле.
3. Лівоінваріантні векторні поля груп Лі.
4. Алгебра Лі лінійної та ортогональної груп.
5. Однопараметричні підгрупи.
6. Експоненціальне відображення та його властивості.
7. Матрична експонента та її властивості.
8. Теореми про зв'язок гомоморфізмів груп і алгебр Лі та підгруп і підалгебр Лі.

Тема 6. Дія груп Лі на многовидях

1. Поняття дії групи та його види.
2. Приклади дій груп Лі.
3. Поняття орбіти та стабілізатору.
4. Однорідний простір, приклади.
5. Застосування дій груп.

**17. Проведення поточного і підсумкового контролю
Завдання до контрольної модульної роботи №1**

Варіант 1

1. Дайте визначення понять: групоїд, нейтральний елемент, бінарна операція, алгебраїчна система, гомоморфізм алгебр.
2. Сформулюйте теорему (перша ознака підкільця).
3. Доведіть теорему (про гомоморфізми груп).
4. Доведіть, що характеристика будь-якого тіла або нуль, або просте число.
5. Нехай $Z_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$, де m – фіксоване натуральне число, $m > 1$. Визначимо на множині Z_m бінарні операції \oplus та \otimes таким чином:

$$a \oplus b = r_1 \text{ та } a \otimes b = r_2,$$

де r_1, r_2 – залишки від ділення чисел $a+b$ та ab на m . Довести, що (Z_m, \oplus, \otimes) – комутативне кільце з одиницею.

6. Встановити гомоморфне відображення φ кільця цілих чисел Z на кільце T і побудувати фактор-кільце $Z / \text{Ker} \varphi$ кільця Z за ядром $\text{Ker} \varphi$ гомоморфізму φ , якщо $T = \{0, e\}$, а операція додавання і множення в T задано таблицями:

\times	0	e
0	0	0
e	0	e

+	0	e
0	0	e
E	e	0

Варіант 2

1. Дайте визначення понять: кільце, n -арна операція, обернений елемент, модель, конгруенція.
2. Сформулюйте теорему (друга ознака підкільця).
3. Доведіть теорему (про гомоморфізми груп).
4. Доведіть, що будь-яке поле F характеристики 0 містить підполе, ізоморфне полю \mathbb{Q} раціональних чисел.
5. Нехай $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a * b = \frac{1}{a^2 + b^2}$. З'ясуйте, чи є вказане правило $*$ бінарною операцією на множині A .
6. Доведіть, що будь-яка комутативна ідемпотентна напівгрупа $\langle A, \cdot \rangle$ ізоморфно вкладається в напівгрупу підмножин множини A .

Варіант 3

1. Дайте визначення понять: стабільне відношення, поле, алгебра, тіло, модулярна решітка.
2. Сформулюйте теорему (перша ознака підгрупи).
3. Доведіть теорему (про гомоморфізми груп).
4. Доведіть, що непуста підмножина H групи G з операцією $*$ є підгрупою групи G тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову:

$$\forall a, b \in H \quad a * b^{-1} \in H.$$

5. Опишіть групу рухів правильного тетраедра. Довести, що всі обертання (повороти) правильного тетраедра утворюють підгрупу групи рухів.
6. Доведіть, якщо порядок одиниці e поля F у групі $(F, +)$ скінченний, то він є простим числом p , до того ж у цьому випадку всі ненульові елементи поля F мають скінченний порядок p в групі $(F, +)$.

Варіант 4

1. Дайте визначення понять: група, порядок елемента групи, поле характеристики p , ізоморфізм кілець, асоціативна бінарна операція.
2. Сформулюйте теорему (друга ознака підгрупи).
3. Доведіть теорему (про гомоморфізми груп).
4. Доведіть, якщо порядок одиниці e поля F у групі $(F, +)$ скінченний, то він є простим числом p , до того ж у цьому випадку всі ненульові елементи поля F мають скінченний порядок p в групі $(F, +)$.
5. Встановити гомоморфне відображення довільного кільця K на фактор-кільце $\overline{K} = K/I$ кільця K за будь-яким його ідеалом I .
6. Доведіть, що непуста підмножина H кільця K з операціями $+$ та \cdot є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умови:

$$\forall a, b \in H \quad a - b \in H,$$

$$\forall a, b \in H \quad ab \in H.$$

Варіант 5

1. Дайте визначення понять: напівгрупа, абелева група, відображення, алгебраїчна система, алгебра Келі.
2. Сформулюйте теорему (перша ознака підполя).
3. Доведіть теорему (про гомоморфізми груп).
4. Доведіть, що будь-яка комутативна ідемпотентна напівгрупа $\langle A, \cdot \rangle$ ізоморфно вкладається в напівгрупу підмножин множини A .
5. Знайдіть всі підгрупи мультиплікативної групи коренів 10-го степеня з одиниці.

6. Нехай $A = C \setminus \{0\}$, $a * b = \frac{1}{a^2 + b^2}$. З'ясуйте, чи є вказане правило $*$ бінарною операцією на множині A .

Завдання до контрольної модульної роботи №2

Варіант 1

1. Довести, що ортогональна група є підгрупою повної лінійної групи.
2. Нехай F – сюр'єктивний гомоморфізм з групи Лі G в групу Лі H . Довести, що H ізоморфна $G / \text{Ker} \varphi$.

Варіант 2

1. Довести компактність ортогональної групи. Знайти її компоненти зв'язності.
2. Нехай G – зв'язна група Лі, а F – сюр'єктивний гомоморфізм з групи Лі G в групу Лі H з дискретним ядром. Показати, що F – гладке покриваюче відображення.

Варіант 3

1. Довести, що унітарна група – група Лі.
2. Нехай ненульова алгебра Лі L нільпотентна. Доведіть, що в ній існує ідеал коразмірності 1.

Варіант 4

1. Знайти алгебру Лі спеціальної лінійної групи.
2. Показати, що ортогональна група ізоморфна групі лінійних перетворень векторного простору, які зберігають скалярний добуток.

Варіант 5

1. Довести компактність ортогональної групи. Знайти її компоненти зв'язності.
2. Нехай F – сюр'єктивний гомоморфізм з групи Лі G в групу Лі H . Довести, що H ізоморфна $G / \text{Ker} \varphi$.

Запитання до підсумкового контролю

1. Операції над множинами та їх властивості.
2. Властивості логічних зв'язок.
3. Декартовий добуток та його властивості.
4. Операція взяття образу множини.
5. Операція композиції відношень та її властивості.
6. Види відношень між двома множинами та їх властивості: рефлексивні, антирефлексивні, симетричні, антисиметричні, транзитивні.
7. Замикання відношень та їх властивості.
8. Поняття інваріантності, замкненості та замикання.
9. Еквівалентності. Фактор-множина.
10. Частково впорядковані множини (ЧВМ). Їх різновиди.
11. Прямий добуток порядків. Лексикографічний порядок.
12. Найбільший/найменший, максимальний/мінімальний елементи ЧВМ. Питання їх існування та єдиності для різних видів ЧВМ.
13. Функція. Відображення.
14. Область визначення (значення) функцій.
15. Образ, прообраз множини при відображенні.
16. Композиція відображень та її властивості.
17. Ін'єктивне, сюр'єктивне та бієктивне відображення.
18. Перетворення множини. Обернене відображення.
19. Бінарна операція. Часткова бінарна операція.
20. Види бінарних операцій (комутативна, асоціативна, дистрибутивна).
21. Нейтральний елемент.
22. Підмножина замкнена відносно операції.

23. Адитивна та мультиплікативна форми запису бінарних операцій.
24. Алгебра. Однотипні алгебри. Приклади алгебр.
25. Гомоморфізм, мономорфізм, епіморфізм, ізоморфізм, ендоморфізм, автоморфізм алгебр.
26. Група. Абелева група.
27. Порядок групи. Приклади груп.
28. Властивості груп.
29. Гомоморфізми груп.
30. Підгрупа групи.
31. Циклічна група, приклади.
32. Комутант групи.
33. Розв'язна група.
34. Кільце, приклади.
35. Дільники нуля.
36. Властивості кільця.
37. Підкільце.
38. Алгебраїчна система. Ізоморфізми алгебраїчних систем.
39. Тіло характеристики нуля.
40. Поле.
41. Решітки.
42. Модулярні та дистрибутивні решітки.
43. Фільтр над множиною. Ультрафільтр. Приклади.
44. Ультрадобуток. Застосування.
45. Квазімногovid. Приклади. Характеристичні властивості.
46. Визначальні співвідношення.
47. Репліки.
48. Вільні композиції.
49. Вільні системи.
50. Многovid. Приклади. Структурні характеристики многovidу.
51. Ранги многovidу.
52. Визначення групи, підгрупи, гомоморфізму групи.
53. Породжуюча множина і циклічні групи.
54. Суміжні класи і нормальні підгрупи.
55. Дії групи на множині, орбіти та стабілізатори.
56. Автоморфізми, центр і комутант групи.
57. Визначення і приклади топологічних груп.
58. Підгрупи і фактор-групи.
59. Однорідні простори.
60. Гомоморфізми топологічних груп. Неперервність гомоморфізму груп в одиниці.
61. Зв'язна компонента одиниці групи.
62. Покриття та однозв'язність.
63. Локальні гомоморфізми.
64. Визначення і приклади групи Лі.
65. Підгрупи групи Лі.
66. Визначення і приклади алгебр Лі.
67. Лівоінваріантні векторні поля.
68. Дотичний простір в одиниці групи.
69. Алгебра Лі.
70. Визначення гомоморфізму груп і алгебр Лі.
71. Гомоморфізм алгебр Лі індукований гомоморфізмом груп Лі.
72. Алгебра Лі підгрупи.
73. Однопараметричні підгрупи.

74. Експоненціальне відображення та його властивості.
75. Теорема про замкнену підгрупу та її наслідки.
76. Теорема про підгрупу, що відповідає підалгебрі Лі.
77. Дії груп Лі.
78. Фактор-многовиди та однорідні простори.
79. Орбіти та стабілізатори.
80. Образ і ядро гомоморфізму.
81. Орбіти компактних груп Лі.