

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЗ „ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА”**

**Кафедра алгебри та системного аналізу**

**СИЛАБУС**

навчальної дисципліни «Спецкурс з теорії графів»  
(назва дисципліни)  
для освітнього рівня третій освітньо-науковий рівень  
напряму / спеціальності(ей) 111 Математика

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри  
Протокол № 4 від 26.11.2019 р.

Завідувач кафедри проф. Жучок А.В.  (підпис)

Перезатверджено: протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

Перезатверджено: протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

Перезатверджено: протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_





1. **Назва дисципліни.**  
„СПЕЦКУРС З ТЕОРІЇ ГРАФІВ”

2. **Код дисципліни.**  
ВПП1

3. **Тип дисципліни.**  
Вибіркова

4. **Рік (роки) навчання.**  
1-й

5. **Семестр / семестри.**  
1

**Кількість кредитів ECTS.**  
3

6. **Відомості про викладача (викладачів).**  
Тоїчкіна Олена Олександрівна – старший викладач кафедри алгебри та системного аналізу, кандидат фізико-математичних наук, e-mail: toichkina.e@gmail.com

7. **Мета вивчення дисципліни (в термінах результату навчання й компетенції).**  
Мета – оволодіння сучасними алгебраїчними методами теорії графів, дослідження її зв'язків з теорією груп, лінійною алгеброю та геометрією, ознайомлення з актуальною науковою проблематикою та підготовка до самостійної науково-дослідної роботи у цьому напрямку.

8. **Компетенції здобувача, які формуються внаслідок вивчення дисципліни.**

В результаті освоєння освітньо-наукової програми освітнього рівня доктора філософії у здобувача мають бути сформовані такі компетентності:

- Інтегральна компетентність (ІК), здатність розв'язувати комплексні проблеми в галузі професійної та/або дослідницько-інноваційної діяльності.
- загальні компетентності (ЗК), які не залежать від галузі та є обов'язковими для здобувачів ступеню доктора філософії;
- фахові компетентності (ФК), які розкривають вміння та навички здобувачів ступеню доктора філософії.

**Таблиця 1. Компетентності та програмні результати навчання згідно із Освітньо-науковою програмою доктора філософії 111 Математика.**

ВБ2.1.1	Спецкурс з теорії графів	3,0	ІК, ЗК4, ЗК6, ЗК7, ЗК8, ЗК11, ЗК15, ЗК18, ЗК19, ЗК20, ЗК21, ЗК22, ЗК23, ЗК32, ЗК33, ФК3, ФК4, ФК10, ФК13, ФК20, ФК21, ФК27, ФК29, ФК31, ФК32, ФК37	ПРЗ-2, ПРЗ -13, ПРЗ -14, ПРЗ -21, ПРЗ -22, ПРУ-28, ПРУ-30, ПРУ-32, ПРУ-33, ПРУ-37
---------	--------------------------	-----	--	---

**Знання:**

- Знання базових поняття й результатів теорії графів.
- Знання структурних властивостей спеціальних класів графів.

- Знання основних понять й результатів, що належать до груп автоморфізмів графів, вершинно транзитивних і реберно транзитивних графів, дистанційно транзитивних графів і графів Келі.
- Знання основних теорем теорії графів і зв'язка між ними.
- Знання прикладні задач теорії графів.
- Знання основних алгоритмів теорії графів.
- Знання та навички щодо створення математичних моделей та розв'язання дослідницьких задач методом теорії графів.
- Знання методів теорії графів для опису структурних властивостей математичних структур.
- Знання інформаційних технологій для знаходження, збереження, аналізу та репрезентування отриманих наукових даних з теорії графів.
- Знання кількісних методів аналізу інформації, вміння робити обґрунтовані висновки та рекомендації.
- Знання характерних особливостей наукової мови в теорії графів.

#### **Уміння:**

- Уміння застосовувати основні поняття і результати теорії графів, встановлювати зв'язки між ними.
- Уміння оцінювати основні числові параметри графів.
- Уміння виявляти ключові структурні характеристики графів: зв'язність, двочастковість, ейлеровість, планарність.
- Уміння обчислювати групи автоморфізмів графів та встановлювати їх властивості.
- Уміння знаходити породжуючі множини в групах та будувати відповідні графи Келі.
- Уміння знаходити інваріанти графів.
- Уміння складати алгоритми на графах.
- Уміння оцінювати складність алгоритмічного розв'язання теоретико-графових задач.
- Уміння використовувати методи теорії графів для опису фізичних явищ і процесів при розв'язанні задач.
- Уміння застосовувати апарат теорії графів при вивченні алгебраїчних систем.
- Уміння формулювати нові підходи для вирішення проблем з теорії графів.
- Уміння застосовувати сучасні ефективні засоби роботи з науковою та навчально-методичною літературою з теорії графів.
- Уміння застосовувати концептуально-методологічні принципи, притаманні сучасній науковій раціональності, для пізнання явищ в алгебрі та алгебраїчних системах.
- Уміння за допомогою інформаційних технологій видобувати, зберігати, аналізувати та репрезентувати отримані наукові данні з теорії графів.
- Уміння використовувати дедукцію, індукцію в дослідженнях графів.
- Уміння здійснювати аналіз теоретичних та практичних проблем науки за допомогою теорії графів.
- Уміння реагувати на основні ідеї та розпізнавати важливу наукову інформацію під час обговорень, дискусій, офіційних перемовин, лекцій, бесід, що пов'язаних з теорією графів. Уміння формулювати висновки та узагальнення.
- Уміння розробляти алгоритми розв'язання задач математичного та інформаційного характеру з позицій теорії графів.

#### **9. Передумови (актуальні знання, необхідні для опанування дисципліни).**

Вивчення дисципліни “Спецкурс з теорії графів” передбачає наявність систематичних та ґрунтовних знань з таких курсів, як „Лінійна алгебра та аналітична геометрія”, “Дискретна математика”, “Загальна алгебра”, “Математична логіка та теорія алгоритмів”.

## 10. Зміст дисципліни.

№	Змістовні модулі та їхня структура	денна форма навчання					заочна форма навчання				
		загальна кількість	Лекції	практичні заняття	лабораторні роботи	самостійна робота	загальна кількість	Лекції	практичні заняття	лабораторні роботи	самостійна робота
<b>Перший модуль</b>											
<b>Тема 1. Основні поняття теорії графів</b>											
1.1.	Визначення графа	6	2			4					
1.2.	Операції над графами. Метричні інваріанти	6		2		4					
1.3.	Маршрути в графах	4				4					
<b>Тема 2. Зв'язність</b>											
2.1.	Вершинна зв'язність та реберна зв'язність	4				4					
2.2.	Структурні теореми (теорема Мадера про $k$ -зв'язний підграф, теорема Менгера, теорема Уїтні та Дірака)	6	2			4					
<b>Тема 3. Групи автоморфізмів</b>											
3.1.	Симетричні групи та групи перестановок	8	2	2		4					
3.2.	Дії груп. Орбіти. Стабілізатори	4				4					
3.3.	Транзитивні дії. Групи автоморфізмів графів.	10	2	2		6					
<b>Другий модуль</b>											
<b>Тема 4. Транзитивні графи</b>											
4.1.	Вершинно транзитивні графи. Графи Хемінга та Джонсона	10	2	2		6					
4.2.	Транзитивні графи Петерсена	8	2	2		4					
4.3.	Реберно транзитивні графи. Графи Фолкмана	4				4					
<b>Тема 5. Графи Келі</b>											
5.1.	Породжуючі множини та визначаючі співвідношення в групах	8	2	2		4					
5.2.	Графи Келі та їх групи автоморфізмів	8	2	2		4					
5.3.	Гамільтонові цикли в графах Келі	4				4					
<b>ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ ГОДИН</b>		<b>90</b>	<b>16</b>	<b>14</b>		<b>60</b>					

## 11. Список рекомендованої навчальної літератури.

### Основна навчальна література

- Горбатов В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика : Учеб. для вузов / В. А. Горбатов. – М. : Наука. Физматлит, 2000 (1999). – 540 с.
- Емеличев, В.А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. М. : Наука, 1990. – 384 с.
- Зыков, А.А. Основы теории графов / А. А. Зыков. М. : Наука, 1987. 384 с.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов : учеб. пособие для вузов: пер. с англ. / Р. Хаггарти. – М. : Техносфера, 2004(2003).

5. Асанов М. О., Баранский В. А. и др. Дискретная математика. Графы, матроиды, алгоритмы : учеб. пособие / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин . – СПб. : Лань, 2010. – 362 с.
6. Оре О. Теория графов : пер. с англ. / О. Оре .– М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 352 с.
7. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари ; пер. с англ. В. П. Козырев . – М. : Мир, 1973. – 300 с.

#### **Додаткова навчальна література**

1. Замятин А. П. Графы и сети : учеб. пособие / А. П. Замятин .- Екатеринбург : Изд-во УрГУ, 2004. – 159 с.
2. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер .– М. : Ми , 1977. – 324 с.
3. Оре О. Графы и их применение / О. Оре .– 4-е изд. .– М. : URSS, 2008. – 172 с.

#### **12. Технології викладання та атестації.**

##### **Діяльність студента:**

- опанування теоретичного матеріалу;
- самопідготовка (повторення матеріалу підручників та навчальних посібників, підготовка до практичних занять, поточного та підсумкового контролю);
- поточний контроль теоретичних знань під час проведення практичних робіт;
- написання контрольних модульних робіт.

##### **Поточний контроль:**

- виконання практичних завдань;
- дві письмові модульні контрольні роботи.

##### **Форма семестрового контролю:**

##### **1 семестр – іспит.**

#### **13. Критерії оцінювання (у %).**

Семестрову рейтингову оцінку розраховують, виходячи з критеріїв:

- письмові модульні контрольні роботи – 65%;
- результати виконання практичних робіт – 35%.

#### **14. Мови викладання.**

Українська.

#### **15. Навчальний контент до проведення практичних робіт**

##### **Теми практичних робіт**

##### **Перший модуль**

1. Метричні характеристики графа. Компоненти зв'язності графа.
2. Пошук мінімального шляху в графі. Алгоритм Флойда пошуку відстані між двома парами вершин графа.
3. Застосування теорем Мадера, Менгера, Уїтні та Дірака.
4. Ізоморфізм графів.

##### **Другий модуль**

5. Графи Келі.
6. Графи Келі на симетричній групі.
7. Гамільтоновість графів Келі на скінченній групі.

#### **Навчальний контент до організації самостійної роботи**

##### **Теми для самостійного вивчення**

##### **Тема 1. Основні поняття теорії графів**

1. Визначення графа. Деякі спеціальні графи.

2. Абстрактні та помічені графи. Число помічених графів.
3. Ізоморфізм графів.
4. Способи завдання графів. Матриці графа.
5. Підграфи. Степенна послідовність і степенна множина графа. Регулярні графи.
6. Локальні і алгебраїчні операції над графами,  $n$ -мірний куб.
7. Метричні характеристики графів: ексцентриситет вершини, радіус і діаметр графа. Центр графа.
8. Алгоритм пошуку в ширину.
9. Маршрути, ланцюги і цикли в графах.
10. Зв'язні графи. Найпростіші властивості зв'язних графів.
11. Зв'язок між числами вершин, ребер і компонент зв'язності графа.
12. Дводольні і  $k$ -частинні графи. Критерій Кеніга двочастковості графа.

### **Тема 2. Зв'язність**

1. Вершинна (реберна) зв'язність.
2. Співвідношення між числом вершинної зв'язності, числом реберної зв'язності і мінімальним ступенем графа. Двозв'язні графи і їх властивості.
3. Блоки і точки зчленування графа. Поняття  $k$ -зв'язкового графа і  $k$ -зв'язних графів.

### **Тема 3. Групи автоморфізмів**

1. Дії груп.
2. Орбіти.
3. Стабілізатори.
4. Групи автоморфізмів графів. Приклади.

### **Тема 5. Транзитивні графи**

1. Регулярні та транзитивні графи.
2. Дистанційно транзитивні графи та їх класифікація.
3. Платонові та архімедові графи.
4. Циркулянти.
5. Реберно транзитивні графи.

### **Тема 6. Графи Келі**

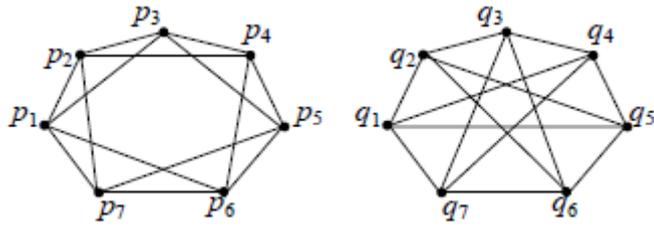
1. Графи Келі та їх властивості. Приклади.
2. Нормальні графи Келі.
3. Діаметри та хроматичні числа графов Келі.
4. Граф Кнезера: коли він є графом Келі
5. Графи Келі на симетричній групі.
6. Гамільтоновість гіперкуба і код Грея.
7. Комбінаторні умови для гамільтоновості.
8. Гамільтоновість графів Келі на довільній скінченній групі.
9. Гамільтоновість графів Келі на симетричній групі.
10. Діаметр графів Келі на абелевих та неабелевих групах.
11. Діаметр графів Келі на симетричній групі.

## **Проведення поточного і підсумкового контролю**

### **Завдання до контрольної модульної роботи №1**

#### **Варіант 1**

1. Показати ізоморфізм двох неорієнтованих графів, представлених геометрично, за допомогою матриць інцидентності.



Для цього записати матриці інцидентності для обох графів та знайти порядок

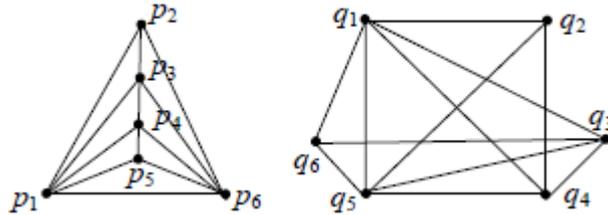
перестановки стовпців  $(1, 2, 3, \dots) \rightarrow (\dots)$  та рядків  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \end{pmatrix}$ , які переводять одну

матрицю в іншу, після чого розставити нову нумерацію вершин і ребер 2-го графа, які відповідають вершинам і ребрам 1-го графа.

2. Довести, що в графі, усі прості цикли якого мають парну довжину, немає жодного циклу непарної довжини.
3. Задача про хід коня. Чи можна ходом коня обійти шахову дошку, побувавши у кожній клітинці один раз?
4. Довести, що граф з 53 вершинами, кожна з яких має степінь не менше 26, зв'язний.
5. Скільки існує орбіт пар відносно підстановки на множині з  $n$  елементів, яка переставляє два елементи, а всі інші залишає нерухомими.

### Варіант 2

1. Показати ізоморфізм двох неорієнтованих графів, представлених геометрично, за допомогою матриць інцидентності.



Для цього записати матриці інцидентності для обох графів та знайти порядок

перестановки стовпців  $(1, 2, 3, \dots) \rightarrow (\dots)$  та рядків  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \end{pmatrix}$ , які переводять одну

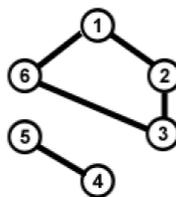
матрицю в іншу, після чого розставити нову нумерацію вершин і ребер 2-го графа, які відповідають вершинам і ребрам 1-го графа.

2. Довести, що в графі, усі прості цикли якого мають парну довжину, немає жодного замкненого маршруту непарної довжини.
3. Задача про хід коня. Чи можна ходом коня обійти шахову дошку, побувавши у кожній клітинці один раз і повернутися в початкову точку?
4. Довести, що граф з 45 вершинами і 950 ребрами зв'язний.
5. Скільки існує орбіт пар відносно підстановки на множині з  $n$  елементів, яка переставляє два елементи, а всі інші залишає нерухомими.

## Завдання до контрольної модульної роботи №2

### Варіант 1

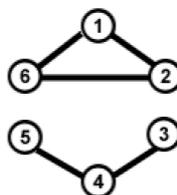
1. Побудувати нетривіальний граф з найменшою кількістю вершин, який не має нетривіальних автоморфізмів.
2. Для заданого графа знайти групу автоморфізмів та її потужність:



3. Довести, що існують тільки два самодоповнювальних графи з п'ятьма вершинами.
4. Нехай  $S$  – породжуюча множина групи  $G$ . Довести, що граф Келі  $\Gamma = Cay(G, S)$  є зв'язним  $S$ -регулярним графом.
5. Довести, що для довільного  $n \geq 2$  з точністю до ізоморфізму існують лише два графи з  $n$  вершинами, в яких  $n-1$  вершина має попарно різні степені, причому з цих двох графів рівно один є зв'язним.

### Варіант 2

1. Побудувати нетривіальний ациклічний граф з найменшою кількістю вершин, який не має нетривіальних автоморфізмів.
2. Для заданого графа знайти групу автоморфізмів та її потужність:



3. Довести, що існує тільки один самодоповнювальний граф із чотирма вершинами.
4. Нехай  $S$  – породжуюча множина групи  $G$ . Довести, що граф Келі  $\Gamma = Cay(G, S)$  є вершинно транзитивним графом.
5. Довести, що для довільного  $n \geq 3$  існує граф із  $n$  вершинами, в якому  $n-1$  вершина мають попарно різні степені, причому ізольованих вершин немає.

### Запитання до підсумкового контролю

1. Поняття графа, простого графа, орграфа, мультиграфа і орграфа.
2. Типи графів: порожній, повний, регулярний, двочастковий.
3. Ізоморфізм графів.
4. Підграфи: остовний, власний, правильний.
5. Операції над графами: об'єднання, з'єднання, доповнення, стягування підграфа у вершину.
6. Способи завдання графів: матриці суміжності вершин і ребер, матриця інцидентності, списки суміжності.
7. Маршрут, ланцюг, простий ланцюг, цикл, простий цикл.
8. Довжина маршруту і відстань між вершинами, діаметр, радіус і центри графа.
9. Зв'язні вершини, зв'язний граф, компоненти зв'язності.
10. Міри зв'язності: вершинна та реберна зв'язність.
11. Теорема Менгера в вершинній формі.
12. Оцінка числа ребер у простому графі.
13. Зв'язність орграфів: сильна, одностороння, слабка.
14. Виділення компонент сильної зв'язності.
15. Група автоморфізмів графа.
16. Вершинно транзитивні графи.
17. Графи Джонсона та їх групи автоморфізмів.
18. Платонові й архімедові графи і їх групи автоморфізмів.
19. Реберно транзитивні графи.
20. Дистанційно транзитивні графи.
21. Графи Келі і їх основні властивості.

22. Циркулянти.
23. Нормальні графи Келі.
24. Гамільтонові цикли в графах Келі.
25. Розфарбування і хроматичні числа графів Келі.
26. Графи Келі симетричних груп.