МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЗ „ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА"

Кафедра алгебри та системного аналізу

СИЛАБУС

навчальної дисципліни **Напівгрупи та пов'язані з ними системи**
(назва дисципліни)

для третього освітньо-наукового рівня доктор філософії (PhD)

напряму / спеціальності 111 Математика

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри
протокол № 4 від 26.11.2019 р.

Завідувач кафедри проф. Жучок А.В. ________(підпис)

Перезатверджено: протокол №______ від ____________

Перезатверджено: протокол №______ від ____________

Перезатверджено: протокол №______ від ____________

Старобільськ – 2019

1. **Назва дисципліни.**

НАПІВГРУПИ ТА ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ СИСТЕМИ

2. **Код дисципліни.**

ВПП1

3. **Тип дисципліни.**

Вибіркова

4. **Рік (роки) навчання.**

1-й

5. **Семестр / семестри.**

2

6. **Кількість кредитів ECTS.**

3

7. **Відомості про викладача (викладачів).**

Жучок Анатолій Володимирович – завідувач кафедри алгебри та системного аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор, e-mail: zhuchok.av@gmail.com

8. **Мета вивчення дисципліни (в термінах результату навчання й компетенції).**

Мета – формування теоретичних знань та практичних навичок з основ теорії напівгруп для подальшого використання при наукових дослідженнях.

9. **Компетенції здобувача, які формуються внаслідок вивчення дисципліни**

В результаті освоєння освітньо-наукової програми освітнього рівня доктора філософії у здобувача мають бути сформовані такі компетентності:

– Інтегральна компетентність (ІК), здатність розв'язувати комплексні проблеми в галузі професійної та/або дослідницько-інноваційної діяльності.

– загальні компетентності (ЗК), які не залежать від галузі та є обов'язковими для здобувачів ступеню доктора філософії;

– фахові компетентності (ФК), які розкривають вміння та навички здобувачів ступеню доктора філософії.

Таблиця 1. Компетентності та програмні результати навчання згідно із Освітньо-науковою програмою доктора філософії 111 Математика.

ВПП1	Напівгрупи та пов'язані з ними системи/ Спецкурс з теорії графів	3,0	ІК, ЗК4,ЗК6, ЗК7, ЗК8, ЗК11, ЗК15, ЗК18, ЗК19, ЗК20, ЗК21, ЗК22, ЗК23, ЗК32, ЗК33, ФК3, ФК4, ФК5, ФК6, ФК7, ФК8, ФК9, ФК10,ФК11, ФК12, ФК13, ФК17, ФК20, ФК21, ФК27	ПРН-З-2, ПРН-З-13, РН-З-14, ПРН-З-21, ПРН-З-22, ПРН-З-28, ПРН-З-29, ПРНЗ-З-30, ПРН-У-10, ПРН-У-14, ПРН-У-16, ПРН-У-21, ПРН-У-22, ПРН-У-23, ПРН-У-25, ПРН-У-26, ПРН-У-27, ПРН-У-28, ПРН-У-32, ПРН-У-33

Очікувані результати:

У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувач освіти повинен набути такі результати навчання:

Знання

• предметів та об'єктів вивчення сучасної алгебри і теорії чисел, основ теорії напівгруп;
• основних понять теорії алгебраїчних систем, зокрема, теорії груп, кілець та полів, допельнапівгруп, теорії подільності у кільцях, теорії конгруенцій, гомоморфізми та ізоморфізми;
• ключові теоретичні положення курсу; основні методи розв'язання типових задач.

Уміння

• розв'язувати основні типи задач, передбачені програмою;
• аналізувати доведення теорем вказувати необхідні та достатні умови; доводити ключові положення курсу.

Комунікація

• Здатність виконувати прості завдання у типових ситуаціях
• Демонструвати навички усного та письмового спілкування державною мовою, висловлюватись та спілкуватися на тему сучасних інформаційних технологій з використанням відповідної термінології.
• Здатність виконувати типові нескладні завдання у типових ситуаціях.

Автономність та відповідальність

• Вміти використовувати різноманітні ресурси для пошуку потрібної інформації, критично аналізувати й опрацьовувати інформацію з метою використання її у сфері професійної діяльності із дотриманням принципів авторських прав.

10. Передумови (актуальні знання, необхідні для опанування дисципліни).

Передбачається попереднє знайомство з шкільним курсом математики та основними поняттями алгебри.

11. Зміст дисципліни.

№	Змістовні модулі та їхня структура	денна форма навчання					заочна форма навчання				
		Загальна кількість	лекції	практичні заняття	Лабораторні роботи	Самостійна робота	Загальна кількість	лекції	Практичні заняття	Лабораторні роботи	Самостійна робота
Перший модуль											
1.1.	Основні визначення теорії напівгруп.		2			6					
1.2.	Конгруенція, фактор-групоїд, гомоморфізм. Основна теорема про гомоморфізми (див. книгу Кліффорд, Престон, Алгебраїчна теорія напівгруп). Операції на множині (нульарна, унарні, бінарні). Приклади операцій.		2	2		8					
1.3.	Універсальні алгебри. Кільця. Приклади кілець. Поля (поле залишків за простим модулем).		2	2		6					
1.4.	Характеристика поля. Твердження про характеристику поля. Підалгебри. Приклади підалгебр. Гомоморфізми та ізоморфізми універсальних алгебр. Приклади.		2	2		6					

1.5.	Визначення і приклади допель-напівгруп. Визначення і приклади сильних допельнапівгруп. Незалежність аксіом сильної допель-напівгрупи.		2	2		6					
Другий модуль											
2.1.	Вільний добуток допельнапівгруп (теорема про будову з доведенням). Вільна допельнапівгрупа (теорема про будову з доведенням).		2			8					
2.2.	Вільна комутативна допельнапівгрупа. Теорема про вільну n-нільпотентну допельнапівгрупу. Побудова вільної лівої *n*-дінільпотентної допельнапівгрупи.			2		8					
2.3.	Теорема про будову вільної сильної допельнапівгрупи. Теорема про конструкцію ізоморфну вільній сильній допельнапівгрупі.		2	2		6					
2.4.	Вільна комутативна сильна допель-напівгрупа. Теорема про вільну *n*-нільпотентну сильну допель-напівгрупу.		2	2		6					
	ЗАГАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ ГОДИН	**90**	**16**	**14**		**60**					

12. Список рекомендованої навчальної літератури.

1. Арбиб М.А Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. – М.: Статистика, 1975.
2. Жучок А.В. Діалгебри / Жучок А.В. – К. : Ін-т математики, 2011. – 256 с. – (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України ; т. 87).
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука. – 1977.
4. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука. – 1973.
5. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теорія полугрупп //М.:Мир. – 1972. – т.1. – с. 285.
6. Кизименко А.М. Свободные полугруппы и прямоугольные связки // II Міжнародна алгебр. конф. в Україні, присв. пам'яті проф. Л.А.Калужніна. (Київ-Вінниця, травень 1999). – Вінниця: ВДПУ. – 1999. – с.85.
7. Кізіменко О.М. Прямокутні сполуки напівгруп // Вісник Київ. Ун-ту. Сер.фіз.-мат. наук. – 1999. – вип. 2. – с. 37–39.
8. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. – М.: Мир, 1985.
9. Ляпин Е. Полугруппы. – Москва, 1960.
10. Л.М. Глускин. Идеалы полугрупп // Матем. сб. 55(1961), 421–448.
11. Сушкевич А.К. Теория обобщенных групп // Харьков-Киев: ГНТИ.
12. Усенко В.М. Напівретракції моноїдів // Труды ИПММ НАН Украины. – т.5. – 2000. – с. 155–164.
13. Усенко В.М. Напівретракції моноїдів // Труды ИПММ НАН Украины, 2000, т. 5. – с. 155–164.
14. Усенко В.М. Напівретракції та симетричні зображення // Вісник Київ. Університету, Серія фіз.-мат. науки, Вип.№1, 2002 р., с. 81–85.
15. Zhuchok A.V. Relatively Free Doppelsemigroups. Monograph. Potsdam University Press, 2018.

13. Технології викладання та атестації.

Діяльність студента:

- опанування теоретичного матеріалу;
- виступ з повідомленням на практичному занятті;
- написання контрольних модульних робіт;
- написання самостійних робіт;
- виконання індивідуальних завдань;
- поточний контроль теоретичних знань під час проведення практичних робіт;
- написання кейсів.

Поточний контроль:
дві письмові модульні контрольні роботи.

Форма семестрового контролю:
іспит.

14. Критерії оцінювання (у %).

Семестрову рейтингову оцінку розраховують, виходячи з критеріїв:

- письмові модульні контрольні роботи – 40%;
- результати роботи на практичних заняттях – 40%;
- самостійна робота – 20%.

15. Мови викладання.

Українська.

16. Навчальний контент до проведення практичних робіт

Теми практичних робіт

Перший модуль

1. Основні визначення теорії напівгруп.
2. Конгруенція, фактор-групоїд, гомоморфізм.
3. Основна теорема про гомоморфізми Операції на множині (нульарна, унарні, бінарні). Приклади операцій.
4. Універсальні алгебри. Кільця. Приклади кілець. Поля (поле залишків за простим модулем).
5. Характеристика поля. Твердження про характеристику поля.
6. Підалгебри. Приклади підалгебр.
7. Гомоморфізми і ізоморфізми універсальних алгебр. Приклади.
8. Визначення і приклади допель-напівгруп.
9. Визначення і приклади сильних допельнапівгруп. Незалежність аксіом сильної допель-напівгрупи.

Другий модуль

10. Вільний добуток допельнапівгруп (теорема про будову з доведенням).
11. Вільна допельнапівгрупа (теорема про будову з доведенням).
12. Вільна комутативна допельнапівгрупа.
13. Теорема про вільну n-нільпотентну допельнапівгрупу.
14. Побудова вільної лівої n-дінільпотентної допельнапівгрупи.
15. Теорема про будову вільної сильної допельнапівгрупи.
16. Теорема про конструкцію ізоморфну вільній сильній допельнапівгрупі.
17. Вільна комутативна сильна допель-напівгрупа.
18. Теорема про вільну n-нільпотентну сильну допель-напівгрупу.

17. Навчальний контент до організації самостійної роботи

Теми для самостійного вивчення

1. Тест асоціативності за Лайтом.
2. Циклічні напівгрупи.
3. Регулярні елементи. Інверсні напівгрупи.
4. Праві групи.
5. Вільні напівгрупи. Біциклічна напівгрупа.
6. Відношення Гріна.
7. 0-мінімальні ідеали та 0-прості напівгрупи.
8. Головні фактори напівгрупи.
9. Теорема Риса.
10. Напівгрупи матричного типу над групою з нулем.
11. Групоїди Брандта.
12. Гомоморфізми регулярних рисовських напівгруп матричного типу.
13. Зображення Шютценберже.
14. Точне зображення регулярної напівгрупи.

18. Проведення поточного і підсумкового контролю

Завдання до контрольної модульної роботи

Варіант 1

1. Допельнапівгрупи. Приклади допельнапівгруп.

2. Кільця та їх гомоморфізми. Приклади.

3. На множині Z цілих чисел визначено операцію $\oplus$ за формулою $c \oplus d = c + d + 2019$. Чи є $(\mathrm{Z}, \oplus)$ групою ?

4. Довести, що кожний комутативний дімоноїд є допельнапівгрупою.

Варіант 2

1. Сильні допельнапівгрупи. Приклади сильних допельнапівгруп.

2. Універсальні алгебри. Приклади.

3. Нехай $F[X]$ – вільна напівгрупа на множині X. Чи буде відображення $F[X] \to F[X]: x_1x_2....x_n \mapsto x_1x_2....x_nx_1x_2....x_n$ ендоморфізмом, автоморфізмом ?
4. Перевірити, чи утворює множина пар цілих чисел (a,b), $a,b \in Z$, кільце, якщо операції додавання і множення пар введено так:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)*(c,d)=(ac,bd).$$

Варіант 3

1. Незалежність аксіом сильної допельнапівгрупи.

2. Підалгебри універсальних алгебр. Приклади.

3. Нехай $F[X]$ – вільна напівгрупа на множині X. Чи буде відображення $F[X] \to F[X]: x_1x_2....x_n \mapsto x_1x_nx_1x_n$ ендоморфізмом, автоморфізмом ?

4. Довести, що варіант будь-якої допельнапівгрупи є допельнапівгрупою.

Варіант 4

1.Теорема про вільний добуток допельнапівгруп.

2. Поле. Характеристики поля.
3. Показати, що допельнапівгрупа Ріса $(\mathrm{D}, \prec, \succ)$ задовольняє тотожності

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z),$$
$$(x \succ y) \succ z = x \succ (y \succ z).$$

4. Нехай F – деяке поле, g – елемент поля F, який не є квадратом (тобто $g \neq x^2$ для будь-якого $x \in F$). На множині $M = F \times F$ введемо операції:

$$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t),\ (x, y) * (z, t) = (xz + gyt, xt + yz).$$

Довести, що M є полем відносно цих операцій. Воно називається квадратичним розширенням поля F .

Варіант 5

1. Теорема про будову вільних допельнапівгруп.
2. Бінарні алгебраїчні операції. Приклади. Сильні допельнапівгрупи.
3. Нехай $F[X]$ – вільна напівгрупа на множині X. Чи буде відображення $F[X] \to F[X]: x_1 x_2 \dots x_n \mapsto x_n x_1 x_1 x_n$ ендоморфізмом, автоморфізмом ?
4. Перевірити, чи є множина чисел виду $a + b\sqrt{2}$, де $a, b \in Z$, відносно звичайної операції множення напівгрупою.

Варіант 6

1. Вільні комутативні допельнапівгрупи.

2. Напівгрупа бінарних відношень. Відношення еквівалентності.

3. Довести, що кожний комутативний дімоноїд є сильною допельнапівгрупою.
4. Нехай $F[X]$ – вільна напівгрупа на множині X. Чи буде відображення $F[X] \to F[X]: x_1 x_2 \dots x_n \mapsto x_n x_1^{\,n} x_1 x_n^n$ ендоморфізмом, автоморфізмом ?

Варіант 7

1. Вільні *n*-нільпотентні допельнапівгрупи.

2. Конгруенції на напівгрупах. Приклади.

3. Довести, що варіант будь-якої комутативної сильної допельнапівгрупи є комутативною сильною допельнапівгрупою.

4. Нехай на множині пар цілих чисел (a, b), $a, b \in Z$, задано операцію множення:

$$(a, b) * (c, d) = (ac + bd, ad + bc).$$

Перевірьте, чи буде ця операція асоціативна, комутативна, ідемпотентна.

Варіант 8

1. Вільні ліві *n*-дінільпотентні допельнапівгрупи.

2. Групи та їх приклади. Гомоморфізми груп.

3. Нехай $F[X]$ – вільна напівгрупа на множині X. Чи буде відображення $F[X] \to F[X]: x_1 x_2 .... x_n \mapsto x_1^n$ ендоморфізмом, автоморфізмом ?

4. Перевірити, чи утворює множина пар цілих чисел (a,b), $a,b \in Z$, поле, якщо операції додавання і множення пар введено так:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \quad (a,b)*(c,d)=(0,0).$$

Варіант 9

1. Ідеали напівгруп. Приклади.

2. Основні поняття теорії напівгруп. Приклади напівгруп.

3. Довести тотожність асоціативності вільного добутку допельнапівгруп.

4. Перевірити, чи є множина R відносно звичайної операції додавання і операції множення, що визначається правилом $ab = 2ab$, кільцем.

Варіант 10

1. Типи бінарних відношень. Приклади.

2. Гомоморфізми та ізоморфізми універсальних алгебр. Приклади.

3. Нехай $F[X]$ – вільна напівгрупа на множині X. Чи буде відображення $F[X] \to F[X]: x_1 x_2 .... x_n \mapsto x_1 x_n x_n x_{n-1} .... x_1$ ендоморфізмом, автоморфізмом ?

4. Довести, що поле матриць виду $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, де a і b – дійсні числа, ізоморфне полю комплексних чисел.

Варіант 11

1. Визначення та приклади допельнапівгруп.
2. Гомоморфізми та ізоморфізми групоїдів.
3. Перевірити, чи є множина R відносно операції, що визначається правилом $ab = 2ab + 3$, напівгрупою. Чи буде ця операція комутативна, ідемпотентна ?
4. Чи є ізоморфними поля $(R, +, \cdot)$ і $(Q, +, \cdot)$?

Варіант 12

1. Відношення еквівалентності, породжене довільним відношенням. Транзитивне замикання відношення.

2. Конгруенції на напівгрупах.
3. Побудувати вільну комутативну допельнапівгрупу.

4. Довести ізоморфізм кілець $Q[i]$ зі звичайними операціями додавання та множення і $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in Q \right\}$ з операціями матричного додавання і добутку.

Варіант 13

1. Універсальні алгебри.
2. Напівгрупа відношень на множині. Факторнапівгрупа.
3. Нехай $F[X]$ – вільна напівгрупа на множині X. Чи буде відображення $F[X] \to F[X] : x_1x_2....x_n \mapsto x_nx_1x_nx_{n-1}....x_1$ ендоморфізмом, автоморфізмом ?
4. Довести, що операції допельнапівгрупи з комутативними та ідемпотентними операціями збігаються.

Варіант 14

1. Кільця та поля. Приклади.
2. Операції на множині. Приклади.

3. Перевірити, чи буде множина J чисел виду $x + y\sqrt{7}$, де x, y – парні, підкільцем у кільці.

4. Довести, що операції дімоноїда з комутативними та ідемпотентними операціями збігаються.

Варіант 15

1. Основні визначення теорії напівгруп. Приклади напівгруп.
2. n-Арні операції.

3. Для будь-якого $n \in N$ покладемо $Q(\sqrt{n}) = \{x + y\sqrt{n} \mid x, y \in Q\}$.
Чи ізоморфні поля $Q(\sqrt{2})$ і $Q(\sqrt{3})$?

4. Довести, що операції допельнапівгрупи $(D, \prec, \succ)$ збігаються, якщо $(D, \prec)$ є моноїдом та $a \prec b = b \succ a$ для всіх $a, b \in D$.

Запитання до підсумкового контролю

1. Основні визначення теорії напівгруп.
2. Конгруенція, фактор-групоїд, гомоморфізм. Основна теорема про гомоморфізми.
3. Операції на множині (нульарна, унарні, бінарні). Приклади операцій.
4. Універсальні алгебри.
5. Кільця. Приклади кілець.
6. Поля (поле залишків за простим модулем).
7. Характеристика поля. Твердження про характеристику поля.
8. Підалгебри. Приклади підалгебр.
9. Гомоморфізми та ізоморфізми універсальних алгебр. Приклади.
10. Визначення і приклади допель-напівгруп.
11. Визначення і приклади сильних допельнапівгруп.
12. Незалежність аксіом сильної допель-напівгрупи.
13. Вільний добуток допельнапівгруп (теорема про будову з доведенням).
14. Вільна допельнапівгрупа (теорема про будову з доведенням).
15. Вільна комутативна допельнапівгрупа.
16. Теорема про вільну *n*-нільпотентну допельнапівгрупу.
17. Побудова вільної лівої n-дінільпотентної допельнапівгрупи.
18. Теорема про будову вільної сильної допельнапівгрупи.
19. Теорема про конструкцію ізоморфну вільній сильній допельнапівгрупі.
20. Вільна комутативна сильна допель-напівгрупа.
21. Теорема про вільну *n*-нільпотентну сильну допель-напівгрупу

Більш детальна інформація за посиланням: http://do.luguniv.edu.ua